第 40 卷　第 4 期
2023 年 8 月
应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 40 No. 4
Aug. 2023

文章编号:1000-4939(2023)04-0865-08

温度变化对悬索模态耦合共振特性影响

林恒辉,赵珧冰,郑攀攀,吴先强,张昕涛

(华侨大学土木工程学院,361021 厦门)

摘　要:悬索是一种典型的大跨度低阻尼柔性系统,其包含平方和立方非线性特征,从而呈现出各种非线性动力学行为,尤其是在不同模态之间发生的耦合共振响应。此外实际工程中悬索受气温、太阳辐射、风等因素影响,周围温度场变化明显,而悬索线性和非线性振动特性对于温度变化较为敏感。本研究以悬索同时发生主共振和 3∶1 内共振为例,将之前忽略模态耦合的单自由度模型扩展到两自由度模型,并利用多尺度法求得系统直角坐标下的平均方程。基于所绘制的系统各类响应曲线,对温度变化下悬索模态耦合振动特性开展详细论述。数值算例结果表明:温度下降(上升)时,Irvine 参数更大(更小)的悬索容易发生 3∶1 内共振;在内共振的区间,低阶模态响应幅值受温度变化的影响大于高阶模态的响应幅值;霍普夫分岔对于温度变化的敏感程度要高于鞍结点分岔;在耦合共振区间,系统周期运动对温度变化较为敏感,温度变化有可能导致系统的周期运动变为非周期。

关键词:悬索;温度变化;内共振;立方非线性;分岔与混沌

中图分类号:O322　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.04.016

Modal coupled vibration characteristics of suspended cables with temperature conditions

LIN Henghui, ZHAO Yaobing, ZHENG Panpan, WU Xianqiang, ZHANG Xintao

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 361021 Xiamen, China)

Abstract: The suspended cable is a typical flexible mechanical system with large span and low damping. The system has quadratic and cubic nonlinearities, which leads to it including rich nonlinear behaviors, especially the coupling resonance between different modes. In addition, due to the influence of temperature, solar radiation, wind and other factors, the surrounding temperature field of cable changes obviously, and linear and nonlinear vibration characteristics of suspension cables are sensitive to temperature changes. In this paper, the suspension cable simultaneously has the primary resonance and the three-to-one internal resonance as an example, the single degree of freedom model which ignores modal coupling was extended to multi-degree of freedom model. The average equations of polar and Lagrange coordinates are obtained by multiscale method. Based on the various response curves of the system, the modal coupling

收稿日期:2021-02-01　　**修回日期**:2021-04-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12272139);福建省自然科学基金资助项目(No. 2022J01290);福厦泉国家自主创新示范区协同创新平台资助项目(No. 3502ZCQXT2022002)

通信作者:赵珧冰。E-mail:Ybzhao@hqu.edu.cn

引用格式:林恒辉,赵珧冰,郑攀攀,等.温度变化对悬索模态耦合共振特性影响[J].应用力学学报,2023,40(4):865-872.

LIN Henghui, ZHAO Yaobing, ZHENG Panpan, et al. Modal coupled vibration characteristics of suspended cables with temperature conditions [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(4):865-872.

vibration characteristics of the suspension cable under different temperature are discussed in detail. The numerical example results show that: when the temperature drops (rises), the suspension cables with larger (smaller) Irvine parameters are prone to the three-to-one internal resonance. In the region of internal resonance, the influence of temperature changes on the response amplitude of low-order mode is greater than that of high-order mode. The sensitivity of Hopf bifurcation to temperature change is higher than that of saddle bifurcation. In the resonance region, the periodic motion of the system is sensitive to temperature changes, and the periodic motion of the system may become aperiodic motion when the temperature changes.

Key words: suspended cable; temperature change; internal resonance; cubic nonlinearity; bifurcation and chaos

对于多自由度系统或者连续系统而言,频率之间的公倍关系可能引发内共振,导致模态之间发生能量传递和相互作用。内共振在结构振动中普遍存在,从板、梁、壳、索和管道[1-5]等基本构件到大跨度索结构[6-7]等复杂系统。在不同模态之间,能量有可能发生传递,引发系统产生大幅振动[8]。

索是一类典型的大跨度低阻尼结构,由于初始张拉力和垂度导致该系统同时具有立方和平方非线性,其模态之间存在着丰富的内共振现象[9]。目前,关于索的内共振响应已经有了丰富的研究成果,研究人员通过建立悬索的非线性动力学模型,并采用摄动分析和各种数值计算方法[10],深入研究了模态间的 1∶1、2∶1 和 3∶1 等各类内共振响应[11-12]。从中发现了多解、跳跃、饱和、分岔和混沌等丰富的非线性动力学现象,也进一步说明了索模态间耦合振动的复杂性,以及实际工程中无法忽略索内共振带来的影响。

此外索结构在太阳辐射、风、雨等因素影响下,在工程实践中常处于复杂且时变的温度场中[13]。已有研究主要针对索本身固有的线性和非线性振动特性,倘若进一步考虑外界环境影响,索结构模态间耦合振动特性又将发生怎样改变,现有研究并未给出。已有研究基于单模态离散模型,系统分析了悬索受单频[14]、多频[15-16]和参数激励[17]下局部与全局非线性振动特性受温度变化的影响,温度变化会引起系统参数发生改变,可能导致系统共振特性出现定性和定量变化。

由于悬索模态耦合振动的复杂性,上述研究忽略了模态间的内共振,无法探究温度变化对模态间耦合振动的影响。本研究旨在将悬索单自由度模型推广到多模态系统,通过研究系统多模态间的耦合振动特性,利用多尺度法结合各类数值计算方法,深入探究考虑温度效应影响下的悬索模态耦合非线性振动特性。

1 数学模型

图 1 中水平悬索左右两端分别悬挂于 O 和 B 两点,其跨度为 L,假设 O 点为原点,建立坐标系 O-xy。温度变化会导致悬索形成新的热应力平衡构形,悬索在初始和热应力状态下的悬索的垂度分别用 b 和 $b_{\Delta T}$表示。假设外部激励是均布简谐荷载,$u(x,t)$和 $v(x,t)$则分别代表在外部激励下系统的轴向以及竖向位移。当温度变化范围为 ±40 ℃时,假设温度变化对结构弹性模量、阻尼系数以及横截面面积影响小,可以忽略不计[14-16]。

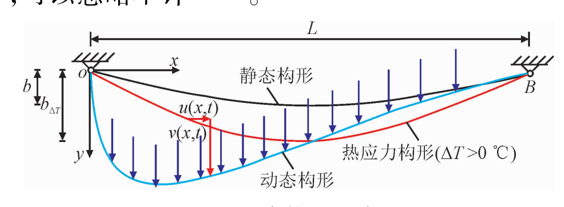


图 1 悬索构形示意图

Fig. 1 Schematic diagram of suspended cable configurations

利用哈密顿变分原理推导得到悬索面内运动方程[14-16]为

$$m\ddot{v}+c_v\dot{v}-\chi_{\Delta T}^2 Hv''-\frac{EA}{L}\left(\frac{y''}{\chi_{\Delta T}^2}+v''\right)\int_0^L\left(\frac{y'v'}{\chi_{\Delta T}^2}+\frac{v'^2}{2}\right)\mathrm{d}x = F_v\cos(\Omega t) \tag{1}$$

其中:m 和 c_v分别为悬索单位长度质量和阻尼系数;E 为弹性模量;H 为水平初张力;A 为横截面面积;y 为静态构形,采用抛物线表示,且 $y(x)=4b(L-x)\cdot x/L^2$;F_v和 Ω 为外激励幅值和频率;$\chi_{\Delta T}^2$ 是由温度变化产生的张力改变系数[18],其等于温度变化后的张力与初张力之比,即$\chi_{\Delta T}^2=H_{\Delta T}/H$。

引入以下无量纲参数

$$v^*(x^*,y^*,f^*)=\frac{v(x,y,b)}{L},t^*=\sqrt{\frac{g}{8b}}t,$$

$$c_v^*=\sqrt{\frac{8b}{g}}\frac{c_v}{m},\Theta=\frac{EA}{H},F_v^*=\frac{F_vL}{H},$$

$$\Omega^*=\sqrt{\frac{8b}{g}}\Omega \tag{2}$$

忽略上标星号，可得无量纲化的运动方程，即

$$\ddot{v}+c_v\dot{v}-\chi_{\Delta T}^2v''-\Theta\left(\frac{y''}{\chi_{\Delta T}^2}+v''\right)\int_0^1\left(\frac{y'v'}{\chi_{\Delta T}^2}+\frac{1}{2}v'^2\right)\mathrm{d}x=F_v\cos(\Omega t) \tag{3}$$

采用 Galerkin 截断，仅考虑发生内共振的两个模态，即 m 和 n 阶模态，将空间 x 和时间 t 分离，即

$$v(x,t)=\varphi_m(x)q_m(t)+\varphi_n(x)q_n(t) \tag{4}$$

其中：$\varphi_i(x)$ 表示模态函数；$q_i(t)$ 表示广义坐标，这里 $i=m,n$，其中模态函数 $\varphi_i(x)$ 根据线性分析可得

正对称模态

$$\varphi_i(x)=\xi_i\left[1-\cos\left(\frac{\omega_i}{\chi_{\Delta T}}x\right)-\tan\left(\frac{\omega_i}{2\chi_{\Delta T}}\right)\sin\left(\frac{\omega_i}{\chi_{\Delta T}}x\right)\right],$$

$(i=1,3,5,\cdots)$

反对称模态

$$\varphi_i(x)=\sqrt{2}\sin(i\pi x),\ \omega_i=\chi_{\Delta T}i\pi,\ (i=2,4,6,\cdots)$$

将式(4)代入式(3)中，可得两自由度方程，即

$$\ddot{q}_m+2\mu_m\dot{q}_m+\omega_m^2q_m+\Lambda_{m1}q_m^2+\Lambda_{m2}q_mq_n+\Lambda_{m3}q_n^2+\Gamma_{m1}q_m^3+\Gamma_{m2}q_m^2q_n+\Gamma_{m3}q_mq_n^2+\Gamma_{m4}q_n^3=f_m\cos(\Omega t) \tag{5}$$

$$\ddot{q}_n+2\mu_n\dot{q}_n+\omega_n^2q_n+\Lambda_{n1}q_m^2+\Lambda_{n2}q_mq_n+\Lambda_{n3}q_n^2+\Gamma_{n1}q_m^3+\Gamma_{n2}q_m^2q_n+\Gamma_{n3}q_mq_n^2+\Gamma_{n4}q_n^3=f_n\cos(\Omega t) \tag{6}$$

其中，非线性项系数如附录 A 所示。

2　摄动分析

采用多尺度法，位移对应的广义坐标为 $q_k(t;\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i q_{ki}(T_0,T_1,T_2)$，其中：$T_i=\varepsilon^i t,(i=0,1,2)$，故 $\partial/\partial t=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i D_i$，$D_i=\partial/\partial T_i$。将其代入式(5)和式(6)中，根据 ε 阶数得到各阶微分方程组。一阶方程的解可以假设为 $q_{k1}=A_k(T_1,T_2)\mathrm{e}^{i\omega_kT_0}+cc$，$k=m,n$。将该解代入到二阶方程中，得其近似解。

考虑 3∶1 内共振时，外激励频率 Ω 与 m 和 n 阶模态频率（ω_m 和 ω_n）的差值采用调谐参数 σ_1 来表示，$3\omega_m$ 和 ω_n 的差值则用调谐参数 σ_2 来描述，三者的关系式分别为：$\Omega=\omega_i+\varepsilon\sigma_1$ 和 $\omega_n=3\omega_m+\varepsilon\sigma_2$，其中 $i=m,n$。将二阶方程的近似解代入到三阶方程，可得

$$2i\omega_m(\dot{A}_m+\mu_mA_m)=K_{mm}A_m^2\bar{A}_m+K_{mm}A_mA_n\bar{A}_n+S_mA_n\bar{A}_m^2\mathrm{e}^{i\varepsilon^2\sigma_2T_0}+\frac{f_m}{2}\delta_{km}\mathrm{e}^{i\varepsilon^2\sigma_1T_0} \tag{7}$$

$$2i\omega_n(\dot{A}_n+\mu_nA_n)=K_{nn}A_n^2\bar{A}_n+K_{nm}A_nA_m\bar{A}_m+S_nA_m^3\mathrm{e}^{-i\varepsilon^2\sigma_2T_0}+\frac{f_n}{2}\delta_{kn}\mathrm{e}^{i\varepsilon^2\sigma_1T_0} \tag{8}$$

其中，非线性相互作用系数 K_{ij} 及 S_i 见附录 B。

将 A_j 表示成直角标形式 $A_j=\frac{[p_j(t)-i\,q_j(t)]\mathrm{e}^{i\beta_j(t)}}{2}$，$j=m,n$，代入可得

$$\dot{p}_m=-\mu_mp_m-\upsilon_mq_m+\frac{S(q_m^2q_n-p_m^2q_n+2p_mp_nq_m)}{8\omega_m}-\frac{K_{mm}q_m(p_m^2+q_m^2)}{8\omega_m}-\frac{K_{mn}q_m(p_n^2+q_n^2)}{8\omega_m} \tag{9}$$

$$\dot{q}_m=-\mu_mq_m+\upsilon_mp_m+\frac{S(p_np_m^2+2p_mq_mq_n-q_m^2p_n)}{8\omega_m}+\frac{K_{mm}p_m(p_m^2+q_m^2)}{8\omega_m}+\frac{K_{mn}p_m(p_n^2+q_n^2)}{8\omega_m}+\frac{f_m\delta_{km}}{2\omega_m} \tag{10}$$

$$\dot{p}_n=-\mu_np_n-\upsilon_nq_n+\frac{S(-3q_mp_m^2+q_m^3)}{24\omega_n}-\frac{K_{nn}q_n(p_n^2+q_n^2)}{8\omega_n}-\frac{K_{nm}q_n(p_m^2+q_m^2)}{8\omega_n} \tag{11}$$

$$\dot{q}_n=-\mu_nq_n+\upsilon_np_n+\frac{S(p_m^3-3p_mq_m^2)}{24\omega_n}+\frac{K_{nn}p_n(p_n^2+q_n^2)}{8\omega_n}+\frac{K_{nm}p_n(p_m^2+q_m^2)}{8\omega_n}+\frac{f_n\delta_{kn}}{2\omega_n} \tag{12}$$

其中：当激励直接作用在低阶模态时（$\Omega=\omega_m$），$\upsilon_m=\sigma_1$，$\upsilon_n=3\sigma_1-\sigma_2$；当激励直接作用在高阶模态时（$\Omega=\omega_n$），$\upsilon_m=(\sigma_1+\sigma_2)/3$，$\upsilon_n=\sigma_1$，此外系统的响应振幅：$a_m=\sqrt{p_m^2+q_m^2}$，$a_n=\sqrt{p_n^2+q_n^2}$。

3　数值算例与分析

选取悬索结构参数为 $E=200$ GPa，$\rho=$

$7\,800.0\ \mathrm{kg/m^3}$, $A=7.069\times10^{-2}\mathrm{m^2}$, $L=200.0\ \mathrm{m}$, $\alpha=1.2\times10^{-5}\,℃^{-1}$, $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$，假设阻尼系数分别为0.006（高阶模态）和0.005（低阶模态）。为了综合反应悬索质量、跨度、抗拉刚度等性质，此处引入Irvine参数[19]，其表达式为 $\lambda^2 = (mgL/H)^2 EA/H$。如图2所示，忽略阻尼项、激励项和非线性项，对悬索进行特征值分析，得到其在不同Irvine参数 l^2 下的前十阶模态频率（不考虑温度变化影响下）。在图2中的（a）~（g）处，两个模态频率之间会呈现出3倍关系。因为并不是频率之间存在公倍关系就一定会发生内共振，因此计算可知图中（b）、（d）和（e）三处，悬索两个正对称模态之间会发生3∶1内共振响应。

本研究聚焦于悬索一阶和三阶正对称模态之间发生的3∶1内共振，图2中（b）处。通过数值算例揭示温度变化对悬索动力学行为的影响。由于温度变化会导致悬索模态频率发生改变，因此将（b）处放大，考虑温度变化±40 ℃时，其模态频率的变化如图所示。图中的一阶（三阶）正对称模态频率对应于悬索第一阶（第五阶）频率。为描述频率间关系，将第一阶频率放大3倍，图中交点处有可能出现3∶1内共振，而频率间公倍关系会受温度变化影响会有改变，导致交点发生偏移。随着温度的升高（降低），Irvine参数较小（较大）的悬索更容易发生耦合共振。悬索在各种温度变化情况下的参数大小及线性/非线性系数的值均发生变化（表1）。

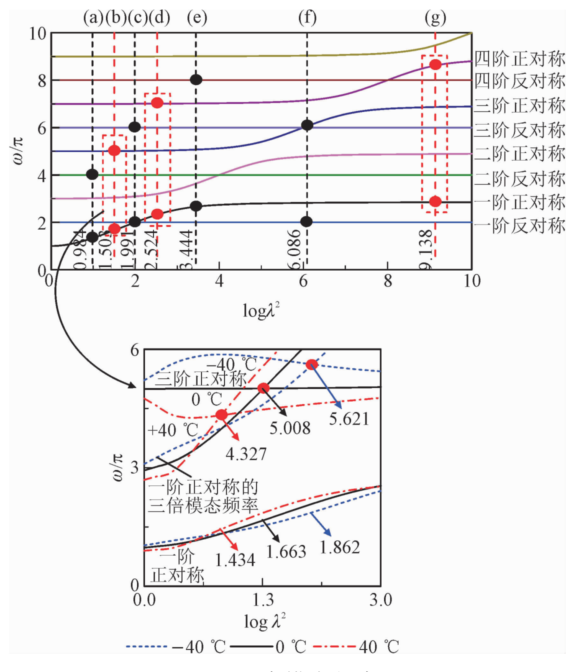


图2 悬索模态频率图

Fig. 2 Mode frequencies of suspended cables

表1 温度变化下悬索系数表

Tab. 1 Coefficients of suspended cbale under temperature variations

m	n	ΔT	$\log l^2$	$\omega_m\pi^{-1}$	$\omega_n\pi^{-1}$	K_{mm}	K_{nn}	K_{mn}, K_{nm}	$3S_n$, S_m
1	5	−40	2.12	1.862	5.621	687 116	-1.05×10^8	8.05×10^6	−223 711
		0	1.50	1.663	5.008	548 756	-8.37×10^7	6.43×10^6	−185 840
		+40	0.97	1.434	4.327	413 308	-6.24×10^7	4.84×10^6	−136 564

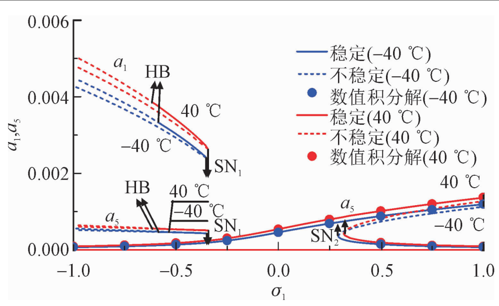


图3 不同温度变化条件下的幅频响应曲线（$f_5=0.002\,5$ 和 $\sigma_2=0$）

Fig. 3 Frequency-response curves under different temperature conditions when $f_5=0.002\,5$ and $\sigma_2=0$

首先，假设外激励直接作用在高阶模态上（$f_1=0$），得到的幅频响应曲线如图3所示。此时系统存在明显的单模态解和两模态解（内共振），其中 a_5 为直接激励幅值，a_1 为内共振响应幅值，HB和SN分别表示霍普夫分岔和鞍结点分岔，实线和虚线分别表示稳定和不稳定解。温度降低时，系统的共振幅值 a_1 和 a_5 均减小，而振幅 a_1 对于温度的变化则更加敏感。而在内共振区域，高阶模态可以将大量能量通过内共振传递给低阶模态，从而引起低阶模态的大幅振动。此时随着 σ_1 不断增加，在内共振区域内，a_1 和 a_5 均减小，在霍普夫分岔HB后由不稳定变为稳定，并直到鞍结点分岔SN，此处系统将发生跳跃现象，在此之后，a_1 消失，系统由两模态解变为单模态解。如图所示鞍结点分岔对温度的敏感程度不如霍普夫分岔。此外采用直接数值积分求解方程组（5）~（6），结果表明数值积分解与多尺度法得到的摄动解吻合较好。

假设外激励作用在低阶模态($f_5=0$)，在相应的调谐参数下($\sigma_1=-0.2$ 和 $\sigma_2=0$)，图 4 给出了悬索在第一阶正对称模态发生主共振情况下的激励响应幅值曲线。由于内共振的存在，受外部直接激发模态的振幅 a_1 与通过内共振激发的模态的振幅 a_5 之间发生能量传递且存在相位差。图 4 可以观察到温度变化引起了系统共振产生明显的变化。尤其是对于大幅振动的区间，随着外激励幅值 f_1 增加，温度变化的影响变得更加明显。

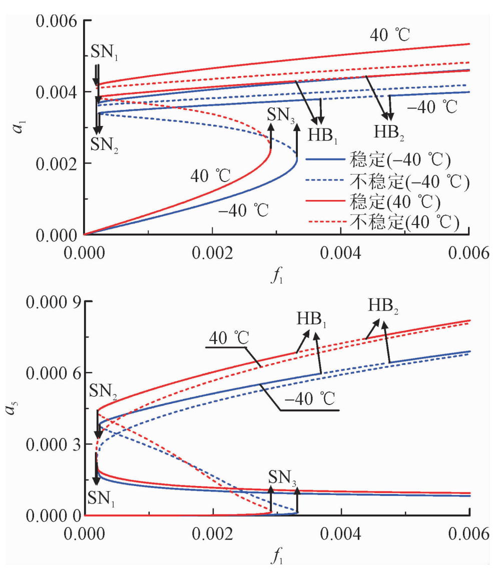


图 4　不同温度变化条件下的幅频响应曲线

($\sigma_1=-0.2$ 和 $\sigma_2=0$)

Fig. 4　Frequency-response curves under different temperature conditions when $\sigma_1=-0.2$ and $\sigma_2=0$

在温度升高的条件下，响应振幅 a_1 和 a_5 都增加。具体而言，对于低阶模态振幅 a_1，当激励幅值 f_1 从 0 开始增大时，出现了一个不断增大的非平凡解。随着激励幅值 f_1 继续增大，在第 3 个鞍结点分岔 SN_3 处失去稳定性，非平凡解出现明显的跳跃现象，幅值迅速增加，且 $\Delta T=40$ ℃时的跳跃现象发生得更早。与此同时，内共振响应振幅 a_5 开始并没有被激发，当 f_1 增大到 0.002 附近才出现微小的振幅，且随着 f_1 进一步增大，a_5 同样在 SN_3 发生跳跃。当 $\Delta T=-40$ ℃时，SN_3 出现在更大的激励幅值处。当激励幅值 f_1 等于 0.006 时，悬索会出现明显的内共振，且有两个稳定的振幅，两个振幅的出现与系统的初始条件相关。当 f_1 不断减小时，可以看到两个霍普夫分岔 HB_1 和 HB_2 以及鞍结点分岔 SN_2。值得注意的是，鞍结点分岔受温度变化的影响较小，霍普夫分岔对于温度变化较为敏感。在升温环境中，霍普夫分岔将发生在激励幅值更小的位置。

接下来假设外部激励幅值 f_1 为 0.002 5，图 5 给出了考虑温度效应时的幅频响应曲线($s_2=0$)。当温度从 40 ℃下降到 −40 ℃时，曲线向左偏转程度增加，即非线性系统呈现出更强的软弹簧特性。当调谐参数 s_1 从 −1.0 开始增大时，在小振幅区间，受直接激励模态的响应幅值 a_1 不断增大(此时 a_5 等于 0)，直到出现第一个鞍结点分岔 SN_1，系统发生跳跃现象。倘若 s_1 继续增大，不动点在霍普夫分岔 HB_1 处失去稳定，在霍普夫分岔 HB_2 处重新获得稳定，此时响应幅值 a_1 随 σ_1 的增大而减小。随着 s_1 增大，升温条件下，系统的霍普夫和鞍结点分岔 SN_1 出现得早，而 SN_2 出现得较晚。与激励响应幅值曲线一致，在升温条件下，两个响应振幅 a_1 和 a_5 均显著增大。

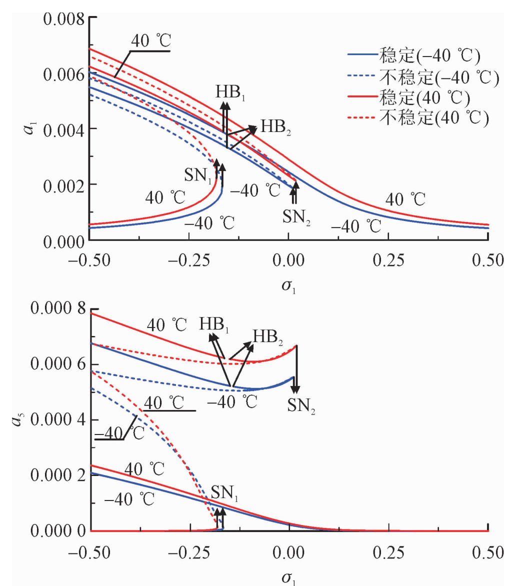


图 5　不同温度变化条件下的幅频响应曲线

($f_1=0.0025$ 和 $\sigma_2=0$)

Fig. 5　Frequency-response curves under different temperature conditions when $f_1=0.0025$ and $\sigma_2=0$

同样假设外激励幅值 f_1 为 0.002 5，调谐参数 s_1 取为 −0.15，调谐参数 s_2 与系统响应幅值曲线如图 6 所示。直接激励模态的振幅 a_1 明显要大于通过内共振激发的幅值 a_5。虽然在升温环境中，两个幅值均会增加，但是前者受温度变化的影响明显要强于后者。系统出现了 3 个霍普夫分岔和 1 个鞍结点分岔，系统在 HB_1 获得稳定，直到 HB_2 点失去稳定性，然后在 HB_3 再次获得稳定性。当温度从 40 ℃下降到 −40 ℃时，前面两个霍普夫分岔点发生在调谐参数 σ_2 更大的位置，而第 3 个霍普夫分岔点则出现在调谐参数 σ_2 偏小的位置。由此可以看出，温度下降时，内共振的区间会减小。

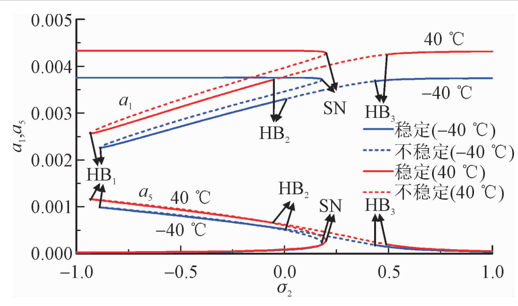


图 6 考虑温度变化影响的幅频响应曲线
(f_1 = 0.002 5 和 σ_1 = −0.15)

Fig. 6 Temperature effects on frequency-response curves when f_1 = 0.002 5 and σ_1 = −0.15

由于霍普夫分岔对于温度变化非常敏感，加上系统在这两个分岔点之间存在着更为复杂的动力学行为，因此为了进一步揭示温度变化的影响，本研究给出了升温和降温时系统的不同调谐参数下的相位图。如图 7 所示的 5 组对应参数的相位图，此时 σ_2 不断减小：0.320→0.310→0.300→0.299→0.295。当 ΔT = 40 ℃时，无论调谐参数如何改变，系统始终表现出周期 1 运动。然而，对于相同的调谐参数 σ_2，如果温度下降到 −40 ℃，该非线性系统将通过倍周期分岔最终进入到混沌运动：周期 1→周期 2→周期 4→周期 8→…→混沌。由此看出温度变化引起的微小变化对系统周期或非周期运动产生明显影响。

为了进一步描述系统在不同温度时的振动特性，图 8 给出了 σ_2 = 0.295 时系统的时程曲线、相位图、频率谱和庞加莱截面。通过庞加莱截面和频率谱，也进一步证实当温度从 40 ℃变为 −40 ℃时，系统由周期运动变为混沌运动。

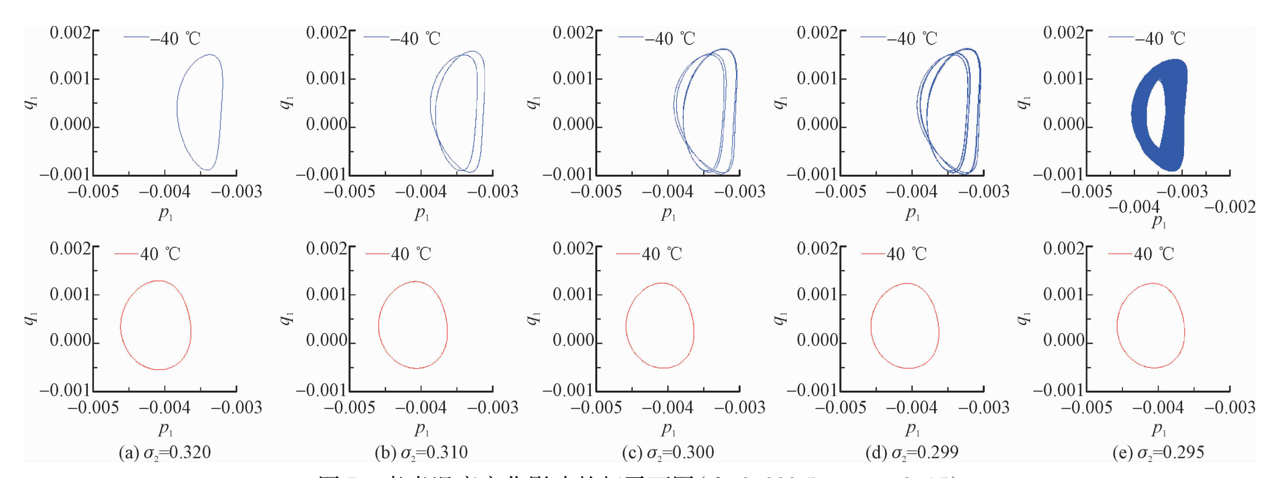


图 7 考虑温度变化影响的相平面图(f = 0.002 5，σ_1 = −0.15)

Fig. 7 Temperature effects on phase portraits(f = 0.002 5，σ_1 = −0.15)

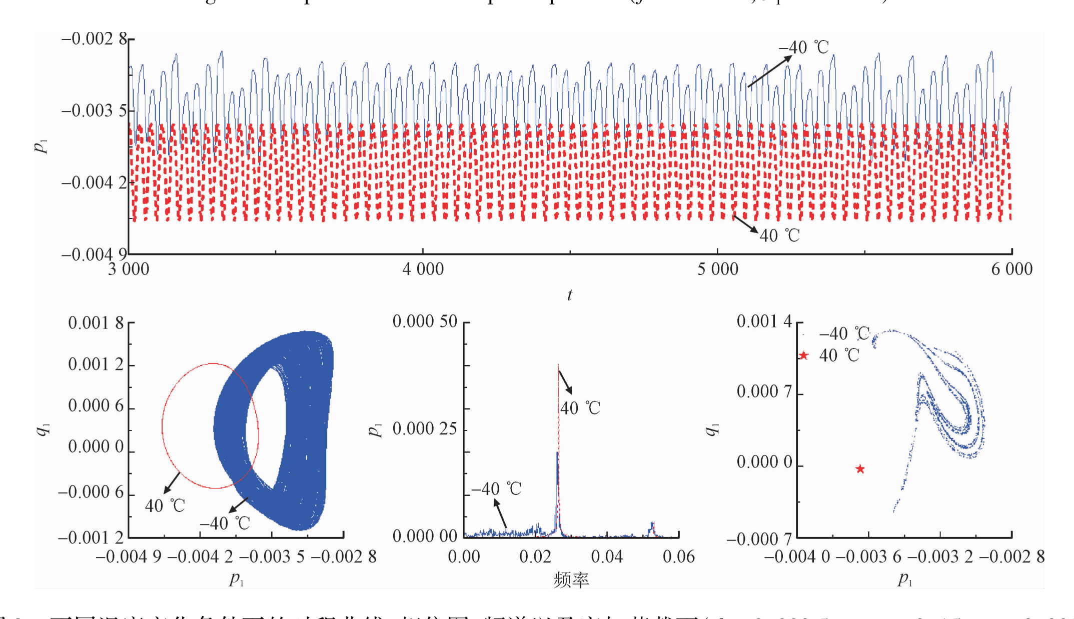


图 8 不同温度变化条件下的时程曲线、相位图、频谱以及庞加莱截面(f_1 = 0.002 5，σ_1 = −0.15，σ_2 = 0.295)

Fig. 8 Time history curves, phase portraits, frequency spectrums and Poincare sections under different temperature conditions (f_1 = 0.002 5，σ_1 = −0.15，σ_2 = 0.295)

4 结　论

本研究基于悬索两自由度模型,针对系统同时发生主共振和3∶1内共振的情况,深入探讨不同温度变化对振动响应特性的影响。结果分析表明:当悬索周围环境温度发生改变时,其固有频率间的公倍关系将被打破,原本难以发生内共振的悬索在温度发生改变下而引发内共振。当温度上升(下降)时,Irvine 参数更小(更大)的悬索可能发生 3∶1内共振。当激励直接作用在低阶模态时,仅有小部分能量传递给高阶模态,反之当激励作用在高阶模态时,会出现大量能量传递到低阶模态,引发其大幅振动。在发生内共振的区间,低阶模态响应幅值受温度变化的影响大于高阶模态的响应幅值。由于温度变化会导致分岔点偏移,而且霍普夫分岔对于温度变化的敏感程度要高于鞍结点分岔。在耦合共振区间,系统的周期运动对于温度变化较为敏感。对于相同激励幅值和调谐参数,系统可能经历由周期运动向非周期运动转变。

参考文献:

[1] 陈晓明,冯志华,张风君,等.含集中质量矩形薄板的动力学建模与质量调幅分析[J].应用力学学报,2018,35(4):743-749.
CHEN Xiaoming,FENG Zhihua,ZHANG Fengjun,et al. Dynamic modeling of rectangular plates with a lumped mass and the amplitude modification effect of mass[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35(4):743-749(in Chinese).

[2] 黄玲璐,毛晓晔,丁虎,等.内共振作用下轴向运动黏弹性梁横向受迫振动[J].振动与冲击,2017,36(17):69-73.
HUANG Linglu, MAO Xiaoye, DING Hu, et al. Transverse nonlinear forced vibration of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance[J]. Journal of vibration and shock,2017,36(17):69-73(in Chinese).

[3] ROSSIKHIN Y A,SHITIKOVA M V. Nonlinear dynamic response of a fractionally damped cylindrical shell with a three-to-one internal resonance[J]. Applied mathematics and computation,2015,257:498-525.

[4] 赵珧冰,郑攀攀,陈林聪,等.受损悬索对称性破缺下非线性耦合振动研究[J].力学学报,2022,54(2):471-481.
ZHAO Yaobing,ZHENG Panpan,CHEN Lincong,et al. Study on nonlinear coupled vibrations of damaged suspended cables with symmetry-breaking[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2022,54(2):471-481(in Chinese).

[5] 张凯凯,谭霞,丁虎,等.超临界输流管道3∶1内共振下参激振动响应[J].应用数学和力学,2018,39(11):1227-1235.
ZHANG Kaikai,TAN Xia,DING Hu,et al. Parametric vibration responses ofsupercritical fluid-conveying pipes in 3∶1 internal resonance[J]. Applied mathematics and mechanics,2018,39(11):1227-1235(in Chinese).

[6] SU X Y,KANG H J,CHEN J F,et al. Experimental study on in-plane nonlinear vibrations of the cable-stayed bridge[J]. Nonlinear dynamics,2019,98(2):1247-1266.

[7] CONG Y Y,KANG H J,YAN G R,et al. Modeling,dynamics,and parametric studies of a multi-cable-stayed beam model[J]. Acta mechanica,2020,231(12):4947-4970.

[8] NAYFEH A H. Nonlinear interactions:analytical,computational,and experimental methods[M]. New York:Wiley-VCH,2000.

[9] 康厚军,郭铁丁,赵跃宇.大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J].力学学报,2016,48(3):519-535.
KANG Houjun,GUO Tieding,ZHAO Yueyu. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2016,48(3):519-535(in Chinese).

[10] 刘小会,闵光云,孙测世,等.直接法与间接法对拉索耦合内共振的影响研究[J].应用力学学报,2020,37(3):1088-1098.
LIU Xiaohui,MIN Guangyun,SUN Ceshi,et al. Influence of direct method and indirect method on internal resonance of cable[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(3):1088-1098(in Chinese).

[11] LACARBONARA W,REGA G,NAYFEH A H. Resonant nonlinear normal modes. Part I:analytical treatment for structural one-dimensional systems[J]. International journal of non-linear mechanics,2003,38(6):851-872.

[12] LACARBONARA W,REGA G. Resonant non-linear normal modes. Part II:activation/orthogonality conditions for shallow structural systems[J]. International journal of non-linear mechanics,2003,38(6):873-887.

[13] TREYSSÈDE F. Finite element modeling of temperature load effects on the vibration of local modes in multi-cable structures[J]. Journal of sound and vibration,2018,413:191-204.

[14] ZHAO Y B,ZHENG P P,LIN H H,et al. Nonlinear coupled dynamics of suspended cables due to crossover points shifting and symmetry breaking[J]. European journal of mechanics - a/solids,2023,99:104921.

[15] ZHAO Y B,ZHENG P P. Parameter analyses of suspended cables subjected to simultaneous combination,super and sub-harmonic excitations[J]. Steel and composite structures,2021,40(2):203-216.

[16] 黄超辉,赵珧冰.多频激励下悬索非线性共振特性受温度影响分析[J].应用力学学报,2019,36(6):1435-1441.

HUANG Chaohui, ZHAO Yaobing. Investigation of temperature effect on nonlinear oscillation characteristics of suspended cable under multi-frequency excitation[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2019, 36(6): 1435-1441(in Chinese).

[17] 吴先强,赵珧冰,郭智锐,等.温度变化对悬索全局动力学特性影响[J].动力学与控制学报,2023,21(4):32-40.
WU Xianqiang, ZHAO Yaobing, GUO Zhirui, et al. Influences of temperature changes on global dynamical characteristics of suspended cables[J]. Journal of dynamics and control, 2023, 21(4): 32-40(in Chinese).

[18] LEPIDI M, GATTULLI V. Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects[J]. International journal of solids and structures, 2012, 49(9): 1103-1116.

[19] IRVINE H M. Cable structures[M]. Cambridge: MIT Press, 1981.

附录 A

$$\Gamma_{k1} = -\frac{\Theta}{2}\int_0^1\left[\varphi_m''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x\,\Gamma_{k4} = -\frac{\Theta}{2}\int_0^1\left[\varphi_n''(x)\int_0^1\varphi_n'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma_{k2} = -\Theta\int_0^1\left[\varphi_m''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)\varphi_n'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{2}\int_0^1\left[\varphi_n''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma_{k3} = -\Theta\int_0^1\left[\varphi_n''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)\varphi_n'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{2}\int_0^1\left[\varphi_m''(x)\int_0^1\varphi_n'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Lambda_{k1} = -\frac{\Theta}{2\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[y''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[\varphi_m''(x)\int_0^1 y'(x)\varphi_m'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Lambda_{k2} = -\frac{\Theta}{\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[\varphi_m''(x)\int_0^1 y'(x)\varphi_n'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[\varphi_n''(x)\int_0^1 y'(x)\varphi_m'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[y_2''(x)\int_0^1\varphi_m'(x)\varphi_n'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Lambda_{k3} = -\frac{\Theta}{2\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[y''(x)\int_0^1\varphi_n'(x)^2\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x - \frac{\Theta}{\chi_{\Delta T}^2}\int_0^1\left[\varphi_n''(x)\int_0^1 y'(x)\varphi_n'(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(x)\mathrm{d}x$$

附录 B

$$K_{mm} = \frac{10\Lambda_{m1}^2}{3\omega_m^2} + \frac{2\Lambda_{n1}\Lambda_{m2}}{\omega_n^2} + \frac{\Lambda_{n1}\Lambda_{m2}}{\omega_n^2 - 4\omega_m^2} - 3\Gamma_{m1},\ K_{nn} = \frac{2\Lambda_{m3}\Lambda_{n2}}{\omega_m^2} + \frac{\Lambda_{m3}\Lambda_{n2}}{\omega_m^2 - 4\omega_n^2} + \frac{10\Lambda_{n3}^2}{3\omega_n^2} - 3\Gamma_{n4},$$

$$K_{mn} = \frac{4\Lambda_{m1}\Lambda_{m3}}{\omega_m^2} + \frac{2\Lambda_{m2}\Lambda_{n3}}{\omega_n^2} + \frac{\Lambda_{m2}^2}{\omega_m^2 - (\omega_m + \omega_n)^2} + \frac{\Lambda_{m2}^2}{\omega_m^2 - (\omega_n - \omega_m)^2} + \frac{2\Lambda_{m3}\Lambda_{n2}}{\omega_n^2 - (\omega_m + \omega_n)^2} + \frac{2\Lambda_{m3}\Lambda_{n2}}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_m)^2} - 2\Gamma_{m3},$$

$$S_m = \frac{2\Lambda_{m1}\Lambda_{m2}}{\omega_m^2 - (\omega_n - \omega_m)^2} + \frac{\Lambda_{m2}\Lambda_{n2}}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_m)^2} - \frac{\Lambda_{m2}\Lambda_{m1}}{3\omega_m^2} + \frac{2\Lambda_{m3}\Lambda_{n1}}{\omega_n^2 - 4\omega_m^2} - \Gamma_{m2},\ S_n = -\frac{2\Lambda_{n1}\Lambda_{m1}}{3\omega_m^2} + \frac{\Lambda_{n2}\Lambda_{n1}}{\omega_n^2 - 4\omega_m^2} - \Gamma_{n1}$$

(编辑 张璐)